CLAMFIM Bologna

Modelli 1 @ Clamfim

Integrale di Lebesgue

3 ottobre 2016

professor Daniele Ritelli

daniele.ritelli@unibo.it

Misure Sia $\mathcal{A}$ una σ-algebra in X una funzione $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ tale che $\mu(\emptyset) = 0$ e che, se per ogni successione $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ di insiemi disgiunti tale che $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ si ha

$$\boldsymbol{\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)}$$

si chiama **misura** su $\mathcal{A}$

Misure Sia $\mathcal{A}$ una σ-algebra in X una funzione $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ tale che $\mu(\emptyset) = 0$ e che, se per ogni successione $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ di insiemi disgiunti tale che $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ si ha

$$\boldsymbol{\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)}$$

si chiama **misura** su $\mathcal{A}$

- La terna $\boldsymbol{(X, \mathcal{A}, \mu)}$ si chiama in tal caso **spazio di misura**

Misure Sia $\mathcal{A}$ una σ-algebra in X una funzione $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ tale che $\mu(\emptyset) = 0$ e che, se per ogni successione $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ di insiemi disgiunti tale che $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ si ha

$$\boldsymbol{\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)}$$

si chiama **misura** su $\mathcal{A}$

- La terna $\boldsymbol{(X, \mathcal{A}, \mu)}$ si chiama in tal caso **spazio di misura**
- Se $\boldsymbol{\mu(X) = 1}$ la misura μ è detta **misura di probabilità**

Definizione Una misura μ su una σ-algebra in $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ si dice

- **finita** se $\boldsymbol{\mu(X) < +\infty}$

Definizione Una misura μ su una σ-algebra in $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ si dice

- **finita** se $\boldsymbol{\mu(X)} < +\infty$

- ***σ*-finita**finita se esiste una successione $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ tale che $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$

e $\mu(A_n) < +\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Definizione Una misura μ su una σ-algebra in $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ si dice

- **finita** se $\boldsymbol{\mu(X)} < +\infty$

- **$\boldsymbol{\sigma}$-finitafinita** se esiste una successione $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ tale che $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$ e $\mu(A_n) < +\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

- **completa** se $A \in \mathcal{A}$, $B \subset A$, $\mu(A) = 0 \implies B \in \mathcal{A}$ e quindi $\mu(B) = 0$

Definizione Una misura μ su una σ-algebra in $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ si dice

- **finita** se $\boldsymbol{\mu(X) < +\infty}$

- **$\boldsymbol{\sigma}$-finitafinita** se esiste una successione $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ tale che $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$ e $\mu(A_n) < +\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

- **completa** se $A \in \mathcal{A}$, $B \subset A$, $\mu(A) = 0 \implies B \in \mathcal{A}$ e quindi $\mu(B) = 0$

- **concentrata** su un insieme $A \in \mathcal{A}$ se $\mu(A^c) = 0$. In tale caso si dice che A è un **supporto di $\boldsymbol{\mu}$**

Monotonia della misura

Se $A, B \in \mathcal{A}$ e $A \subset B$ allora $\mu(A) \leq \mu(B)$

Monotonia della misura

Se A, $B \in \mathcal{A}$ e $A \subset B$ allora $\mu(A) \leq \mu(B)$

Dimostrazione $B = (B \setminus A) \cup A$ implica che

$$\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A)$$

Monotonia della misura

Se A, $B \in \mathcal{A}$ e $A \subset B$ allora $\mu(A) \leq \mu(B)$

Dimostrazione $B = (B \setminus A) \cup A$ implica che

$$\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A)$$

Siccome $\mu(B \setminus A) \geq 0$ ne segue che $\mu(B) \geq \mu(A)$

Sottrattivitàà della misura

Se A, $B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$, $\mu(A) < \infty$ allora $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

Sottrattivitàà della misura

Se $A,\ B \in \mathcal{A},\ A \subset B,\ \mu(A) < \infty$ allora $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

Dimostrazione In precedenza abbiamo dimostrato che

$$\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A).$$

Se $\mu(A) < \infty$ allora la tesi segue immediatamente.

Teorema

Se $A,\ B \in \mathcal{A}$ e se $\mu(A \cap B) < \infty$ allora

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

Dimostrazione. Osserviamo che $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$ e che

$$A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup B$$

Teorema

Se $A,\ B \in \mathcal{A}$ e se $\mu(A \cap B) < \infty$ allora

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

Dimostrazione. Osserviamo che $A \cap B \subset A,\ A \cap B \subset B$ e che

$$A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup B$$

Siccome $\mu(A \cap B) < \infty$ abbiamo

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) - \mu(A \cap B) + \mu(B)$$

Semi additivitàà della misura

Se $(A_i)_{i\geq 1} \subset \mathcal{A}$ allora

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Semi additivitàà della misura

Se $(A_i)_{i\geq 1} \subset \mathcal{A}$ allora

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Successioni crescenti di insiemi

Se $(A_i)_{i\geq 1} \subset \mathcal{A}$ è una successione crescente di insiemi $A_i \subset A_{i+1}$

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

Cerchio

L'area di un poligono regolare di $n \in \mathbb{N}$ lati iscritto in un cerchio di raggio r è

$$\boldsymbol{a_n = r^2\, n\, \sin\frac{\pi}{n}\, \cos\frac{\pi}{n}}$$

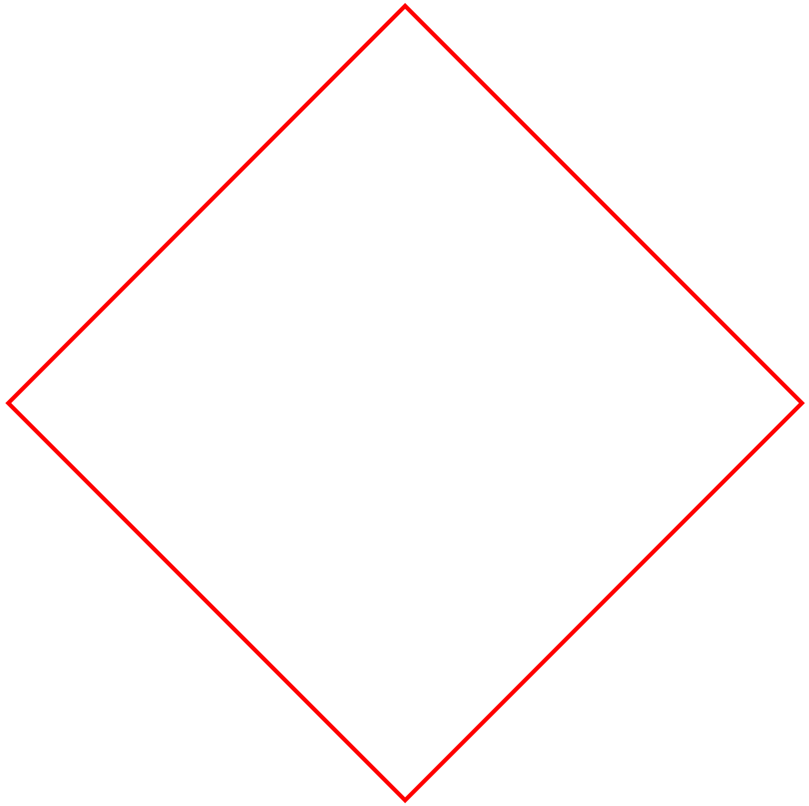


Figure 1: $n = 4$

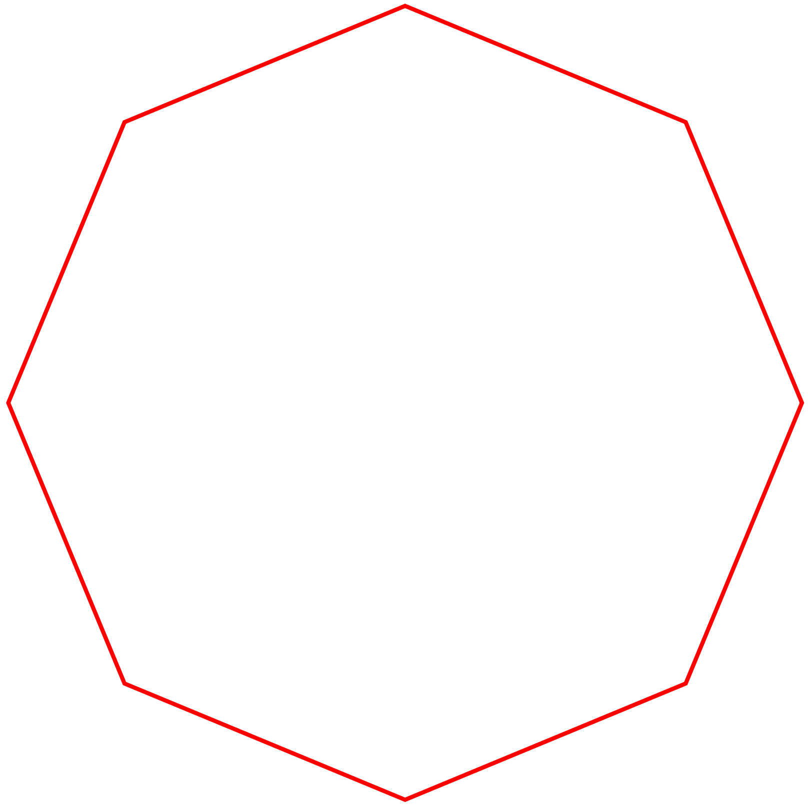


Figure 2: $n = 8$

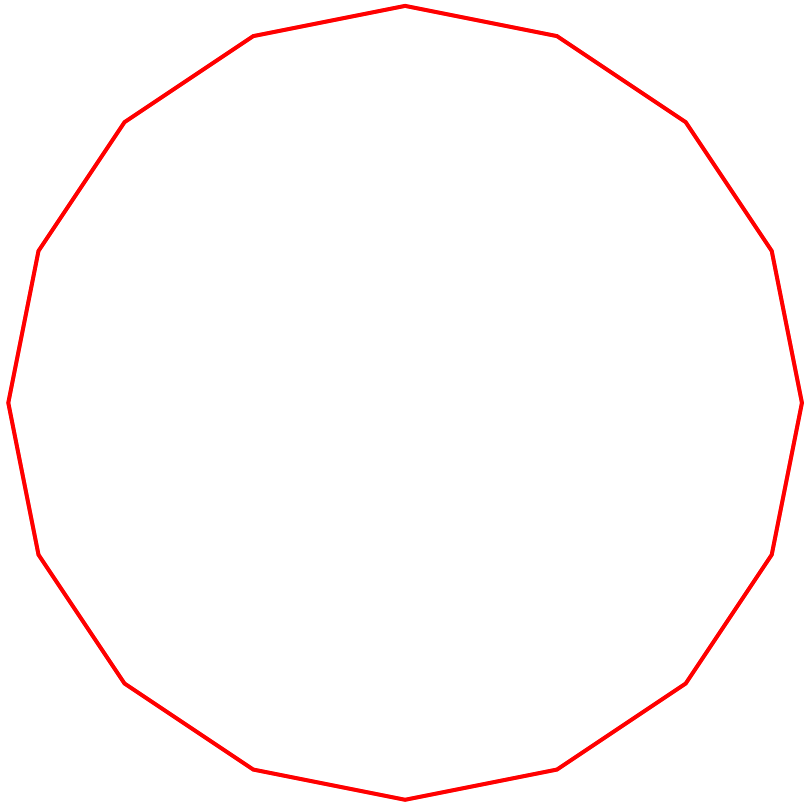


Figure 3: $n = 16$

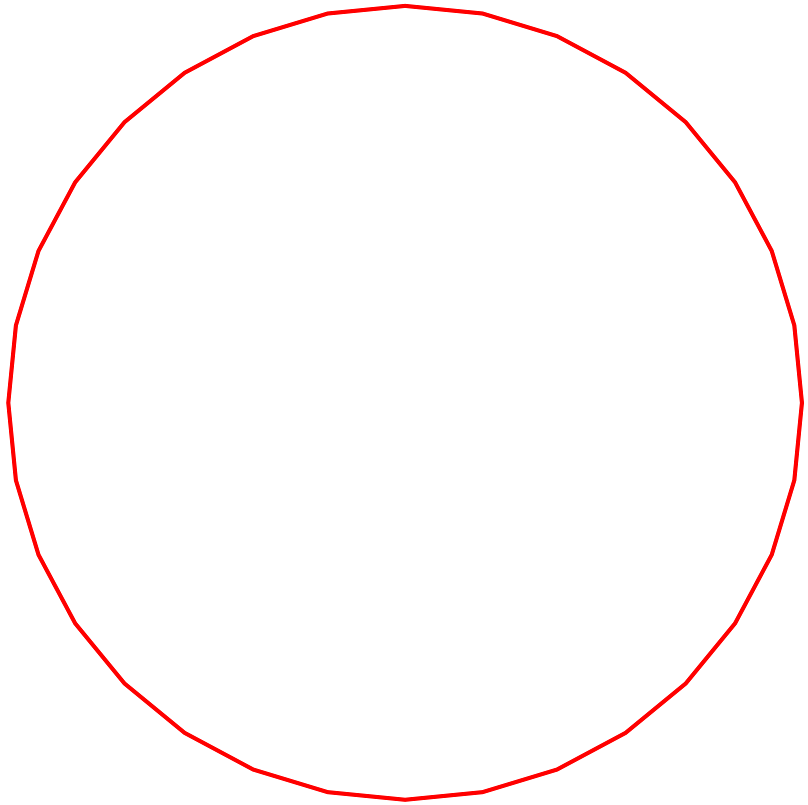


Figure 4: $n = 32$

Successioni decrescenti di insiemi

Se $(A_i)_{i\geq 1} \subset \mathcal{A}$ è una successione decrescente di insiemi $A_{i+1} \subset A_i$ e se $\mu(A_1) < \infty$ allora

$$\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

Esempio Sia $x \in X$. Per ogni $A \in \mathcal{P}(X)$ definiamo

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

δ_x è una misura su $\mathcal{P}(X)$ chiamata misura di Dirac in x.

Esempio Sia $x \in X$. Per ogni $A \in \mathcal{P}(X)$ definiamo

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

δ_x è una misura su $\mathcal{P}(X)$ chiamata misura di Dirac in x.

Si tratta di una misura concentrata sull'insieme $\{x\}$

Esempio Per ogni $A \in \mathcal{P}(X)$ definiamo

$$\mu^{\#}(A) = \begin{cases} \#A & \text{se } A \text{ èè finito} \\ +\infty & \text{se } A \text{ èè infinito} \end{cases}$$

$\mu^{\#}$ èè una misura su $\mathcal{P}(X)$ chiamata **misura del contare**

Invarianza per traslazione

Se $x \in \mathbb{R}^m$ e se $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ il traslato di A mediante x è

$$A + x := \{u \in \mathbb{R}^m \mid u = x + a \text{ per qualche } a \in A\}$$

Invarianza per traslazione

Se $x \in \mathbb{R}^m$ e se $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ il traslato di A mediante x è

$$A + x := \{u \in \mathbb{R}^m \mid u = x + a \text{ per qualche } a \in A\}$$

Teorema Esistono una sola misura completa su $\mathbb{R}$ che indicheremo con ℓ ed una sola sola σ-algebra $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ invarianti per traslazione cioè tali per cui per ogni $x \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$

$$\ell(A) = \ell(A + x)$$

e che per ogni intervallo di estremi a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ risulti

$$\ell([a, b]) = \ell([a, b)) = \ell((a, b]) = \ell((a, b)) = b - a$$

Invarianza per traslazione

Se $x \in \mathbb{R}^m$ e se $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ il traslato di A mediante x è

$$A + x := \{u \in \mathbb{R}^m \mid u = x + a \text{ per qualche } a \in A\}$$

Teorema Esistono una sola misura completa su $\mathbb{R}$ che indicheremo con ℓ ed una sola sola σ-algebra $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ invarianti per traslazione cioè tali per cui per ogni $x \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$

$$\ell(A) = \ell(A + x)$$

e che per ogni intervallo di estremi a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ risulti

$$\ell([a, b]) = \ell([a, b)) = \ell((a, b]) = \ell((a, b)) = b - a$$

Tale misura viene detta misura di Lebesgue in $\mathbb{R}$

Invarianza per traslazione

Se $x \in \mathbb{R}^m$ e se $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ il traslato di A mediante x è

$$A + x := \{u \in \mathbb{R}^m \mid u = x + a \text{ per qualche } a \in A\}$$

Teorema Esistono una sola misura completa su $\mathbb{R}$ che indicheremo con ℓ ed una sola sola σ-algebra $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ invarianti per traslazione cioè tali per cui per ogni $x \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$

$$\ell(A) = \ell(A + x)$$

e che per ogni intervallo di estremi a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ risulti

$$\ell([a, b]) = \ell([a, b)) = \ell((a, b]) = \ell((a, b)) = b - a$$

Tale misura viene detta misura di Lebesgue in $\mathbb{R}$

Valgono le inclusioni strette

$$\mathcal{A}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

Integrale di Lebesgue

Integrale di funzioni semplici

Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $A \in \mathcal{A}$.

La funzione $\varphi : A \to [-\infty, +\infty]$ si dice **semplice** se

Integrale di Lebesgue

Integrale di funzioni semplici

Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $A \in \mathcal{A}$.

La funzione $\varphi : A \to [-\infty, +\infty]$ si dice **semplice** se

(a) L'immagine $\varphi(A)$ è un insieme finito: $\varphi(A) = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$

Integrale di Lebesgue

Integrale di funzioni semplici

Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $A \in \mathcal{A}$.

La funzione $\varphi : A \to [-\infty, +\infty]$ si dice **semplice** se

(a) L'immagine $\varphi(A)$ è un insieme finito: $\varphi(A) = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$

(b) Esistono $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{A}$ tali che se $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ e $A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$

Integrale di Lebesgue

Integrale di funzioni semplici

Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $A \in \mathcal{A}$.

La funzione $\varphi : A \to [-\infty, +\infty]$ si dice **semplice** se

(a) L'immagine $\varphi(A)$ è un insieme finito: $\varphi(A) = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$

(b) Esistono $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{A}$ tali che se $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ e $A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$

(c) per ogni $x \in A_i$ si ha $\varphi(x) = \varphi_i$, $i = 1, \ldots, m$

Funzione caratteristica di un insieme

Se $A \subset X$ è un sottoinsieme di un insieme X la funzione caratteristica dell'insieme A è

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Funzione caratteristica di un insieme

Se $A \subset X$ è un sottoinsieme di un insieme X la funzione caratteristica dell'insieme A è

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Una funzione semplice può essere espressa come combinazione lineare di funzioni caratteristiche

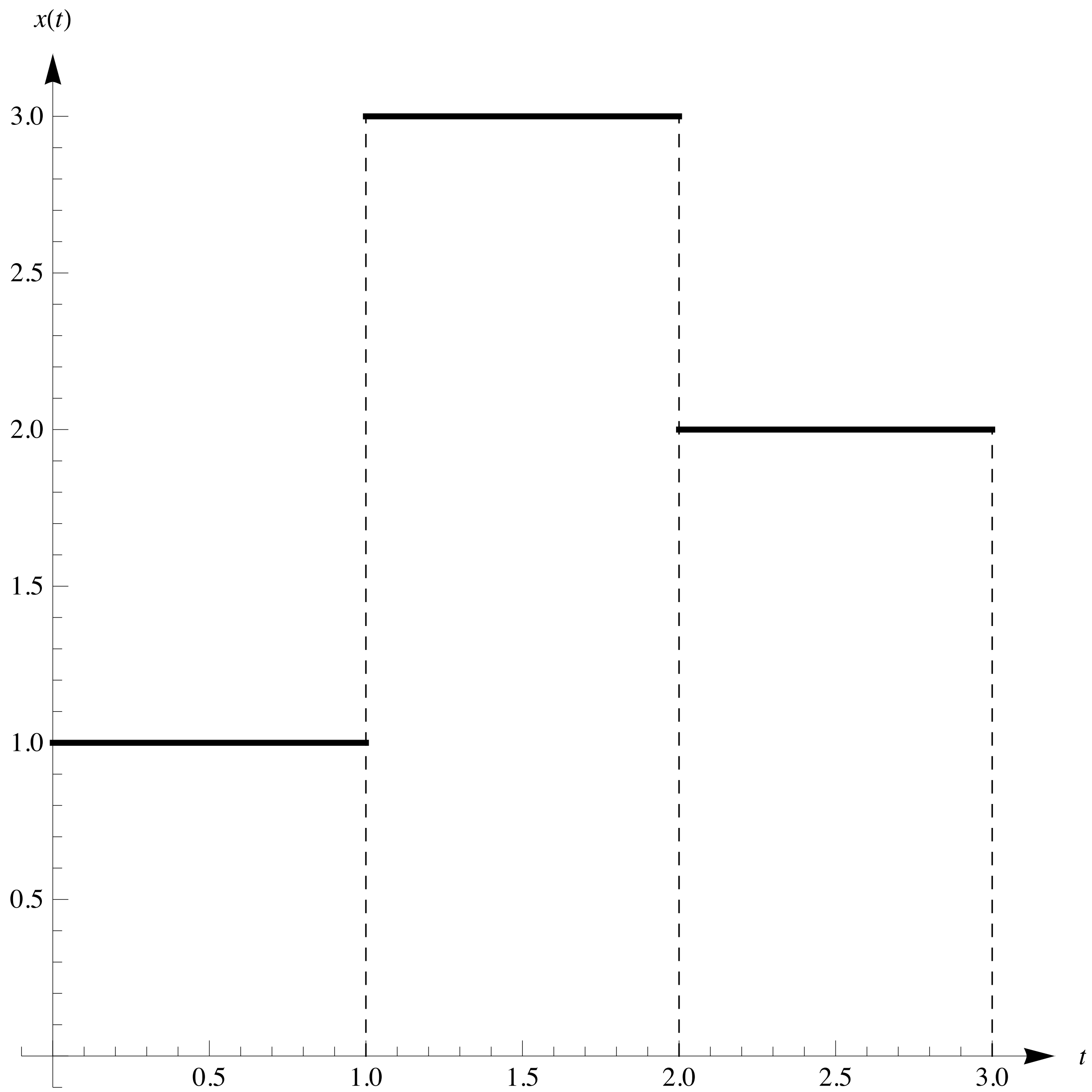
$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \mathbf{1}_{A_i}(x)$$

Integrale di una funzione semplice

Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura, $A \in \mathcal{A}$ e φ una funzione semplice, non negativa su A

L'integrale su A di φ rispetto alla misura μ è

$$\int_A \varphi \, \mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \mu(A_i)$$


x(t)
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
t

Osservazione Seguiamo la convenzione, riguardo ∞ nel sistema esteso dei numeri reali,

$$0 \cdot \pm\infty = 0 \quad \text{sempre.}$$

Linearitàà e positivitàà dell'integrale di una funzione semplice

Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura, $A \in \mathcal{A}$ e $\varphi_1,\ \varphi_2$ funzioni semplici su A

(a) se $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}$ allora

$$\int_A (\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2)\ \mathrm{d}\mu = \alpha_1 \int_A \varphi_1\, \mathrm{d}\mu + \alpha_2 \int_A \varphi_2\, \mathrm{d}\mu$$

Linearitàà e positivitàà dell'integrale di una funzione semplice

Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura, $A \in \mathcal{A}$ e $\varphi_1,\ \varphi_2$ funzioni semplici su A

(a) se $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}$ allora

$$\int_A (\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2)\ \mathrm{d}\mu = \alpha_1 \int_A \varphi_1\ \mathrm{d}\mu + \alpha_2 \int_A \varphi_2\ \mathrm{d}\mu$$

(b) se $\varphi_1 \geq 0$ allora

$$\int_A \varphi_1\ \mathrm{d}\mu \geq 0$$

Proposizione

Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura, $A \in \mathcal{A}$. Allora

$$\mu(A) = \int_X \mathbf{1}_A \, \mathrm{d}\mu$$

Proposizione

Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura, $A \in \mathcal{A}$. Allora

$$\mu(A) = \int_X \mathbf{1}_A \, \mathrm{d}\mu$$

Dimostrazione. Basta realizzare che la funzione caratteristica di un insieme è una funzione semplice.

Proposizione

Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura, $A \in \mathcal{A}$. Allora

$$\mu(A) = \int_X \mathbf{1}_A \, \mathrm{d}\mu$$

Dimostrazione. Basta realizzare che la funzione caratteristica di un insieme è una funzione semplice.

Poiché $\mathbf{1}_A(x) = 0$ se $x \in A^c$ e $\mathbf{1}_A(x) = 1$ se $x \in A$ abbiamo

Proposizione

Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura, $A \in \mathcal{A}$. Allora

$$\mu(A) = \int_X \mathbf{1}_A \, \mathrm{d}\mu$$

Dimostrazione. Basta realizzare che la funzione caratteristica di un insieme è una funzione semplice.

Poiché $\mathbf{1}_A(x) = 0$ se $x \in A^c$ e $\mathbf{1}_A(x) = 1$ se $x \in A$ abbiamo

$$\int_X \mathbf{1}_A \, \mathrm{d}\mu = 0 \times \mu(A^c) + 1 \times \mu(A) = \mu(A)$$

Funzioni misurabili

Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura, $A \in \mathcal{A}$, $f : A \to [-\infty, +\infty]$

Diremo che la funzione f è misurabile, se per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\{x \in A \mid f(x) \le \alpha\} \in \mathcal{A}$$

Proposizione Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ spazio misura, $A \in \mathcal{A}$, $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Le affermazioni seguenti sono equivalenti

i) $\{x \in A \mid f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$

ii) $\{x \in A \mid f(x) < \alpha\} \in \mathcal{A}$

iii) $\{x \in A \mid f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$

iv) $\{x \in A \mid f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$

Theorem's proof follows from the equalities

$$\{x \in A \mid f(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in A \mid f(x) < \alpha + \frac{1}{n}\}$$

Theorem's proof follows from the equalities

$$\{x \in A \mid f(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in A \mid f(x) < \alpha + \frac{1}{n}\}$$

$$\{x \in A \mid f(x) > \alpha\} = A \setminus \{x \in A \mid f(x) \leq \alpha\}$$

Theorem's proof follows from the equalities

$$\{x \in A \mid f(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in A \mid f(x) < \alpha + \frac{1}{n}\}$$

$$\{x \in A \mid f(x) > \alpha\} = A \setminus \{x \in A \mid f(x) \leq \alpha\}$$

$$\{x \in A \mid f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in A \mid f(x) > \alpha - \frac{1}{n}\}$$

Theorem's proof follows from the equalities

$$\{x \in A \mid f(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in A \mid f(x) < \alpha + \frac{1}{n}\}$$

$$\{x \in A \mid f(x) > \alpha\} = A \setminus \{x \in A \mid f(x) \leq \alpha\}$$

$$\{x \in A \mid f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in A \mid f(x) > \alpha - \frac{1}{n}\}$$

$$\{x \in A \mid f(x) < \alpha\} = A \setminus \{x \in A \mid f(x) \geq \alpha\}$$